O PRZEKSZTAŁCENIU KOŁA

NA

PRZECIĘCIE STOŻKOWE

NAPISAŁ

Dr. M. A. BARANIECKI,
Docent prywatny Uniwersytetu Warszawskiego.



Osobne odbicie z XIII tomu Rozpraw Wydz. matem.-przyr. Akad. Um.



KRAKÓW,
W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządem Ignacego Stolcla.
1885.

O przekształceniu koła
NA PRZECIĘCIE STOŻKOWE

napisał

Dr. M. A. Baraniecki
docent prywatny Uniwersytetu Warszawskiego.

Dzieło De La Hirea: *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections de superficies coniques et cylindriques* (1673), swego czasu chwilowo wielce rozgłośne, zostało wkrótce zapomniane i długo było lekceważone, nawet przez tak znakomitego geometrę, jak Poncelet (*Traité des propriétés projectives des figures*, 1822, *introduction*). Dopiéro Chasles (*Aperçu historique... des méthodes en géométrie*, 1837, §. 22 seq.) podniósł doniosłość prac De La Hirea wogóle, a przytoczonéj w szczególności, i wykazał, iż druga część tego dzieła, mająca oddzielny tytuł: *Planiconiques*, przedstawia „piérwszą metodę, dostatecznie ogólną, przekształcania figur na inne figury tegoż rodzaju“.

Metoda ta daje się krótko tak wyłożyć. Obierzmy na płaszczyźnie dwie stałe proste do siebie równoległe, według De La Hirea: „tworzącą“ (*formatrice*) i „kierownicę“, oraz punkt stały, leżący w ogóle zewnątrz tych prostych, który La Hire nazywa „biegunem“. Mając na téj płaszczyźnie jakikolwiek punkt A, poprowadźmy: przez punkt A dowolną

prostą b; przez punkt przecięcia się kierownicy z prostą b i przez biegun prostą c; przez punkt przecięcia się prostéj c z tworzącą prostą d, równoległą do prostéj b. Punkt przecięcia się prostéj d z prostą, przechodzącą przez punkt A i przez biegun — nazwijmy ten punkt przecięcia się A' — jest „utworzony“ (*formé*) przez punkt A. Gdy punkt A opisuje pewną figurę, punkt A' opisuje jednocześnie, w ogóle mówiąc, inną figurę. W szczególnych przypadkach: gdy punkt A opisuje prostą a, punkt A' opisuje inną prostą a' tak, iż punkt przecięcia się prostych a i a' znajduje się na tworzącéj; gdy punkt A opisuje koło, punkt A' opisuje przecięcie stożkowe.

Ponieważ odpowiadające sobie punkty A i A' leżą na prostéj, przechodzącéj przez biegun, zaś odpowiadające sobie proste a i a' przecinają się z sobą na tworzącéj, zatém taki związek między punktami i między prostemi na płaszczyźnie wychodzi na jedno z tém, co Poncelet (l. c., n° 297) nazwał homologiją, któréj osią, jak teraz ogólnie mówimy, jest owa „tworząca“, środkiem zaś ów „biegun“.

Przekształcenie zatém koła na przecięcie stożkowe jest w całéj ogólności, jako szczególny przypadek metody ogólnéj, postawione i rozwiązane przez De La Hirea, a Poncelet i późniejsi inaczéj wysławiali toż samo w gruncie postępowanie a nadto przenieśli je na figury w przestrzeni. —

Doniosłość wzmiankowanego przekształcenia koła jest widoczna; wynika bowiem z niego, że od własności koła przejść możemy łatwo do własności przecięć stożkowych. Dlatego przejście od koła, za pomocą pewnego przekształcenia, do przecięć stożkowych zwracało na siebie uwagę wielu geometrów w najnowszych czasach, osobliwie, gdy pod wpływem odpowiednich wykładów Steinera dojrzała myśl wytworzenia dla zakładów naukowych średnich przystępnego a metodycznego przedstawiania własności przecięć stożkowych, opartego na zasadach geometryi t. zw. „wyższéj“, syntetycznéj-

Steiner jednak wprowadzał przekształcenie koła na przecięcie stożkowe dopiéro przy pomocy rozważania linii biegunowo wzajemnéj z kołem względem koła (*Vorlesungen ueber synthetische Geometrie*, część I, wyd. pośm. Geisera, 1867, §. 23). Pośród wielu, z zamiłowaniem przeprowadzających myśl Steinera uprzystępnienia nauki o przecięciach stożkowych, poważne stanowisko zajął w ostatnich latach A. Milinowski (w Weissenburgu); dokonywa on owego przekształcenia przez rozważanie przecięcia stożkowego jako figury homologicznéj z kołem w przypadku najprostszym, mianowicie, kiedy punkty na przecięciu stożkowym i na kole przedstawiają pary, harmonicznie sprzężone z punktami na osi i ze środkiem (*Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte*, 1882, n° 122—126). —

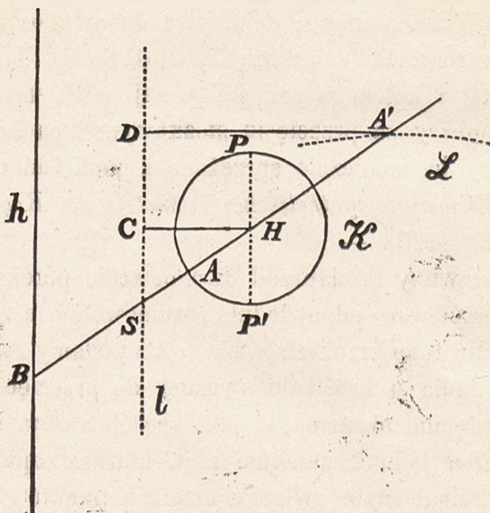
Przedstawimy tu naprzód owo ostatnie przekształcenie, znacznie uprościwszy odpowiednie rozumowanie, a tymsamym i uzasadnienie tego przekształcenia, oraz podamy rozwiązanie pewnego zadania o kréśleniu stycznéj do przecięcia stożkowego, a następnie okażemy, w jaki sposób można metodycznie i ściśle, a jednak zupełnie elementarnie, opiérając się tylko na harmonicznym związku cztérech punktów lub cztérech prostych, udowodnić, że linija biegunowo wzajemna z przecięciem stożkowym względem przecięcia stożkowego jest przecięciem stożkowym, czego nie wprowadza do swego wykładu Steiner, a co tak Milinowski (l. c. n° 175), jak i inni autorowie odpowiednich wykładów, obejmujących tę własność doniosłą, załatwiają niemetodycznie lub stosunkowo nieprzystępnie [1]).

---

[1]) Zastósowania przekształcenia koła na przecięcie stożkowe wyłożę systematycznie w książce: Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych (Biblijoteka matematyczno-fizyczna; Seryja III, tom V), którą przygotowywuję do druku.

I.

Mając środek homologii *H* i oś *h*, oraz koło *K*, którego środek jest w punkcie *H*, poprowadźmy przez jakikolwiek punkt *A* na kole *K* prostą, przechodzącą przez środek *H*, i punkt jéj spotkania się z osią *h* nazwawszy *B*, wyznaczmy



na téj prostéj taki punkt *A'*, iżby on wraz z punktem *A* na kole tworzył parę, harmonicznie sprzężoną z parą punktów *H* i *B*. Wtedy miejsce geometryczne punktu *A'* przedstawi figurę *L*, z kołem *K* homologiczną w tym przypadku szczególnym homologii, albo dobitniej: figurę *L*, harmonicznie pokrewną z kołem *K* względem środka pokrewieństwa harmonicznego *H* i jego osi *h*.

Poprowadźmy równoległą do osi *h* w jednakowéj od niéj i od środka *H* odległości, liniją średnią tego pokrewieństwa; nazwijmy ją *l*, a punkt jéj przecięcia się z prostą *HA* oznaczmy przez *S*. Ponieważ punkt *S* dzieli na połowy odcinek między punktami *H* i *B*, tworzącémi parę harmonicznie

sprzężoną z parą A i A', przeto

$$SH^2 = SA.SA', \qquad \text{czyli} \quad \frac{SA'}{SH} = \frac{SH}{SA},$$

zkąd

$$\frac{SA' \pm SH}{SH \pm SA} = \frac{SA'}{SH}, \qquad \text{czyli} \quad \frac{HA'}{AH} = \frac{SA'}{SH}.$$

Tu znak $+$ należy uwzględnić w tym przypadku, kiedy prosta l spotyka koło K w dwu punktach, a punkt A znajduje się po téj saméj stronie prostéj l, po któréj przypada oś h; we wszystkich zaś innych przypadkach należy brać różnice. Spuściwszy z punktów H i A prostopadłe na prostą l, możemy do ostatniéj proporcyi zamiast stosunku $\frac{SA'}{SH}$ wprowadzić stosunek $\frac{DA'}{CH}$. Czyniąc to, otrzymamy

$$\frac{HA'}{AH} = \frac{DA'}{CH},$$

zkąd

$$\frac{HA'}{DA'} = \frac{AH}{CH}.$$

Tu oba wyrazy stosunku drugiego: AH, promień koła, i CH, połowa odległości środka od osi, pozostają niezmienne dla każdego punktu A na K i odpowiadającego mu A' na L. A więc i stosunek

$$\frac{HA'}{DA'},$$

tj. stosunek odległości każdego punktu A' na L od środka pokrewieństwa harmonicznego H i od jego linii średniéj l, przedstawia liczbę stałą.

A więc, gdy środek pokrewieństwa harmonicznego znajduje się w środku koła, to krzywa, z tym kołem harmoni-

cznie pokrewna, jest miejscem geometryczném takiego punktu, iż stosunek jego odległości od środka i od linii średniéj pokrewieństwa jest stały, t. j. owa krzywa jest przecięciem stożkowém, którego ognisko jest w środku pokrewieństwa a odpowiadająca kierownica ową liniją średnią.

Ponieważ z punktem P na kole K jest harmonicznie pokrewny punkt P' na tymże kole, i nawzajem, przeto punkty P i P' leżą na L i możemy powiedzieć, że z przecięciem stożkowém jest harmonicznie pokrewne koło, którego średnicą jest cięciwa przecięcia stożkowego, przechodząca przez ognisko równoległe do kierownicy; środkiem tego pokrewieństwa jest to ognisko, a liniją średnią kierownica, odpowiadająca temu ognisku.

Stosownie do tego, czy prosta l leży zewnątrz koła K, czytéż jest styczną do niego, czy, nakoniec, przecina je, stosunek $\frac{AH}{CH}$ jest mniejszy, równy, lub większy od jedności, a rozważanie oddzielne tych przypadków prowadzi do wykrycia kształtów przecięć stożkowych. I t. d. —

Zauważymy tu jeszcze, że na tym stopniu już można rozwiązać zadanie: mając ognisko H, kierownicę odpowiadającą mu l i wskazany punkt A' na przecięciu stożkowém, wykréślić styczną do przecięcia stożkowego w punkcie A'. Poprowadzimy prostą HA', punkt przecięcia się jéj z l nazwawszy S, oddzielimy na niéj $BS = SH$, a przez punkt B poprowadzimy prostą h, równoległą do l. Dla trzech punktów B, H i A' wyznaczymy czwarty harmoniczny A, w punkcie A wystawimy prostopadłą do BH, a prosta, łącząca punkt przecięcia się téj prostopadłéj i prostéj h z punktem A', będzie żądaną styczną. —

II.

Wprowadzając pojęcie pokrewieństwa harmonicznego, bardzo łatwo zaraz objaśnić oczywiste niemal dwie następujące własności:

[*a*]. Punkty harmonicznie pokrewne z punktami szeregu harmonicznego przedstawiają szereg harmoniczny.

[*b*]. Proste harmonicznie pokrewne z promieniami pęku harmonicznego przedstawiają pęk promieni harmoniczny. —

Wprowadziwszy późniéj, przy pomocy szeregu punktów i pęku promieni harmonicznych, pojęcie biegunowéj punktu i bieguna prostéj względem koła, można je wprost zastósować do przecięcia stożkowego, jako figury harmonicznie pokrewnéj z kołem, zakréślonym na cięciwie przecięcia stożkowego, przechodzącéj przez ognisko równolegle do kierownicy, jako na średnicy. Następnie, po udowodnieniu własności biegunowych punktów na prostéj i biegunów prostych, przechodzących przez jeden punkt, również tym sposobem zastósować do przecięcia stożkowego własności, które można dla koła okazać bezpośrednio przy pomocy pęków przystających, a mianowicie, iż:

[*c*]. Biegunowe punktów szeregu harmonicznego względem przecięcia stożkowego przedstawiają pęk promieni harmoniczny.

[*d*]. Bieguny promieni pęku harmonicznego względem przecięcia stożkowego przedstawiają szereg punktów harmoniczny. —

Przy pomocy osi podobieństwa trzech kół łatwo udowodnić twierdzenie Pascala dla koła, a następnie wyprowadzić z niego, przez rozważanie biegunowych wiérzchołków sześciokąta Pascala, twierdzenie Brianchona dla koła. Te oba twierdzenia zastosujemy do przecięcia stożkowego przy pomocy wspomnianego wyżéj koła, z nim harmonicznego, i wniesiemy, że:

[*e*]. Pięć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednéj prostéj, wyznaczają przecięcie stożkowe.

[*f*]. Pięć prostych, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, wyznaczają przecięcie stożkowe. —

Mając pęk promieni harmoniczny o wierzchołku w punkcie E, z jakiegokolwiek punktu S zakreślmy koło, przechodzące przez punkt S. Ono przetnie promienie koła w punktach A, B, C, D. Gdy te punkty połączymy z jakimkolwiek punktem E' na kole, to, jeżeli promienie EA i EB tworzyły jednę, a promienie EC i ED drugą parę dawnego pęku harmonicznego, pęk $E'(ABCD)$, którego każde dwa promienie tworzą z sobą takie same kąty, jak odpowiednie promienie pęku $E(ABCD)$, nałożony przystaje do pęku $E(ABCD)$, a więc jest również harmoniczny. Widzimy więc, że:

[*g*]. Jeżeli oznaczymy na kole cztéry punkty takie, iż proste, łączące je z pewnym punktem na kole, tworzą pęk promieni harmoniczny, to odpowiednie proste, łączące owe cztéry punkty z jakimkolwiek punktem na kole, przedstawiają również pęk promieni harmoniczny.

Ztąd zaś, według [*d*],

[*h*]. Jeżeli poprowadzimy cztéry styczne do koła takie, iż punkty przecięcia się z pewną styczną tworzą szereg harmoniczny, to jakakolwiek styczna przecina owe cztéry styczne w punktach, przedstawiających również pęk promieni harmoniczny.

Mając cztéry punkty A, B, C i D, z których żadne trzy nie leżą na jednéj prostéj, możemy, zgrupowawszy te punkty w dwie pary, np. A i B, C i D, wyznaczyć taki punkt E, iż pęk $E(ABCD)$ jest harmoniczny. Poprowadziwszy bowiem prostą AB, a przez punkt C jakąkolwiek prostą, która niech przecina prostą AB w punkcie C', wyznaczmy na prostéj AB taki punkt D', iżby szereg punktów $(ABC'D')$ był harmoniczny. Punkt przecięcia się prostych DD' i CC' będzie żądanym punktem E. Te pięć punktów: A, B, C, D i E, według [*e*], wyznaczają pewne przecięcie stożkowe; nazwijmy je L. Na harmonicznie z L pokrewném kole K, którego średnicą jest cięciwa przecięcia stożkowego L, przechodząca przez ognisko równolegle do kierownicy, punkty A_1,

B_1, C_1, D_1 i E_1, harmonicznie pokrewne z punktami A, B, C, D i E, są według [*b*], takie, iż pęk promieni $E_1(A_1 B_1 C_1 D_1)$ jest harmoniczny. Wtedy jednak, według [*g*], proste, łączące jakikolwiek punkt na K odpowiednio z punktami A_1, B_1, C_1 i D_1, tworzą również pęk promieni harmoniczny. W skutek tego, według [*b*], proste łączące jakikolwiek punkt na L odpowiednio z punktami A, B, C i D, tworzą również pęk promieni harmoniczny. Łatwo jeszcze okazać, że gdyby istniał taki punkt F, nieleżący na L, iżby pęk promieni $F(ABCD)$ był harmoniczny, to wtedy trzy z punktów A, B, C i D znajdowałyby się na jednéj prostéj. A więc:

[*i*]. Poruszający się wierzchołek pęku harmonicznego promieni, przechodzących przez odpowiednie im cztéry punkty stałe, z których żadne trzy nie leżą na téj saméj prostéj, opisuje przecięcie stożkowe; ono przechodzi przez owe cztéry punkty stałe.

W podobny sposób, przy pomocy własności [*f*], [*a*] i [*h*], możemy wprost okazać, że:

[*k*]. Poruszająca się podstawa szeregu harmonicznego punktów przecięcia się jéj z odpowiedniemi im cztérema prostemi stałemi, z których żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt, dotyka przecięcia stożkowego; do niego są styczne owe cztéry proste stałe.

Wprowadziwszy pojęcie krzywéj M', biegunowo wzajemnéj z krzywą M względem przecięcia stożkowego L, przypuśćmy, że krzywa M jest przecięciem stożkowém. Obierzmy na M takie cztéry punkty: A, B, C i D, iżby proste, łączące je z pewnym punktem E na M, a témsamém, według [*i*], z każdym innym na M, tworzyły pęk promieni $E(ABCD)$ harmoniczny. Biegunowe tych punktów: A, B, C, D i E względem L nazwijmy: a, b, c, d i e; one będą stycznemi do linii M', jako do biegunowo wzajemnéj z M względem L, a gdy żadne trzy z wymienionych punktów nie leżą na jednéj prostéj, przeto żadne trzy z ich biegunowych nie prze-

chodzą przez jeden punkt. Bieguny prostych *EA*, *EB*, *EC* i *ED*, jako przechodzących przez punkt *E*, znajdują się na prostéj *e* w punktach, w których ją przecinają odpowiednio proste *a*, *b*, *c* i *d*, i owe bieguny, według [*d*], przedstawiają szereg punktów harmoniczny. Styczną zatém *e* do *M'* styczne *a*, *b*, *c* i *d* do téjże linii przecinają w punktach, przedstawiających szereg harmoniczny. Zważmy, że gdy punkt *E* opisuje przecięcie stożkowe *M*, proste, łączące każde jego położenie odpowiednio z témi stałémi punktami *A*, *B*, *C* i *D*, wciąż tworzą pęk promieni harmoniczny. Każdemu zaś położeniu punktu *E* na *M* odpowiada inne położenie jego biegunowéj, stycznéj *e* do *M'*, owym zaś prostym, łączącym każde położenie punktu *E* ze stałémi punktami *A*, *B*, *C* i *D* na *M*, odpowiadają, jako bieguny, punkty przecięcia się odpowiedniéj stycznéj *e* do *M'* ze stałemi do *M'* stycznemi *a*, *b*, *c* i *d*. Przeto, według [*d*], w każdym położeniu stycznéj *e* do *M'* punkty przecięcia się jéj odpowiednio ze stycznemi *a*, *b*, *c* i *d* do *M'* przedstawiają szereg harmoniczny. Jest zatym, według [*k*], krzywa *M'* przecięciem stożkowém.

Podobnie moglibyśmy tego dowieść, wychodząc z własności [*l*] przecięcia stożkowego, przy pomocy własności [*c*] i [*i*].

W takito sposób można okazać elementarnie, że: liniją biegunowo wzajemną z przecięciem stożkowém względem przecięcia stożkowego jest przecięcie stożkowe [1]).

---

[1]) Biegun cięciwy przecięcia stożkowego, przechodzącéj przez ognisko, znajduje się na kierownicy, odpowiadającéj temu ognisku, w punkcie, w którym ją przecina prostopadła do téj cięciwy w ognisku. Styczna przeto do przecięcia stożkowego w punkcie *P* spotyka kierownicę w punkcie takim, iż prosta, łącząca go z odpowiadającém ogniskiem, jest prostopadła do prostéj, przechodzącéj przez to ognisko i przez punkt styczności *P*. W skutek tego, jak to widać bezpośrednio na odpowiednim rysunku, własności: stosunek odległości jakiegokolwiek punktu na przecięciu stożkowém

od ogniska i od odpowiadającéj kierownicy przedstawia liczbę stałą — odpowiada własność: stosunek wstaw kątów, utworzonych przez styczną do przecięcia stożkowego, jednego z kierownicą, a drugiego z prostą, łączącą punkt przecięcia się stycznéj i téj kierownicy z ogniskiem odpowiadającém, przedstawia liczbę stałą. Opiérając się na téj własności (o ile do odpowiedniego wykładu wprowadzilibyśmy funkcyje trygonometryczne), możnaby także bardzo łatwo okazać, iż biegunowo wzajemna z przecięciem stożkowém względem przecięcia stożkowego jest przecięciem stożkowém.

Warszawa, 5 Listopada r. 1884.

